ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1994

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

EXERCICE

On considère $R = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$, où P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.
On suppose que tous les pôles de R sont simples, et on note Π leur ensemble.

1. Vérifier que $R(X) = Ent(R) + \sum_{\alpha\in\Pi} \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)(X-\alpha)}$. (Ent désigne la partie entière de la fraction).

2. Montrer que si de plus $\deg(P) < \deg(Q)-1$, et $\Pi \subset \mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$, on a :
$\sum_{n=0}^{+\infty} R(n)$ converge et $\sum_{\alpha\in\Pi} \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)} = 0$.

3. On suppose que $\deg(P) < \deg(Q)-1$ et $\Pi \subset \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} R(n)$.

PROBLEME

I

On considère pour tout α paramètre réel, la fonction y_α de la variable réelle $x \geq 0$ donnée par : $y_\alpha(x) = x^{\alpha x}$ si $x > 0$ et par $y_\alpha(0) = 1$.
ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. a. Vérifier que y_α est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0 , +\infty[$.

   b. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout h, $|h| < \eta$ on a pour tout x, $0 \leq x \leq 1$, l'inégalité : $|y_{\alpha+h}(x) - y_\alpha(x)| < \varepsilon$.
   (On appliquera la formule des accroissements finis à $\alpha \longrightarrow x^{\alpha x}$).

2. On suppose $\alpha > 0$.

   a. Etudier y_α ; construire, dans un repère orthonormé, l'allure de son graphe C_α en précisant les tangentes en $x = 0$ et $x = 1$.

   b. Représenter (s'inspirer de la question précédente) l'allure du graphe $C_{-\alpha}$ de $y_{-\alpha}$ *(ne pas chercher les points d'inflexion)*.

   c. On considère $I_\alpha = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} x^{\alpha x} dx$ et $J_\alpha = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{e}} x^{\alpha x} dx$
   Calculer les limites de ces intégrales quand α tend vers $+\infty$.

II

On considère la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad F(\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha x} dx.$

1. Trouver le domaine de définition D_F de F.

2. a. Démontrer que F, ainsi définie, est continue .

   b. Démontrer, sans chercher à dériver F, que F est monotone ; préciser son sens de variation. Démontrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $F(\alpha)F(-\alpha) \geq 1$.

   c. Calculer les limites suivantes :
   (i) $\lim_{\alpha \longrightarrow +\infty} F(\alpha)$;
   (ii) $\lim_{\alpha \longrightarrow -\infty} F(\alpha)$;
   (iii) $\lim_{\alpha \longrightarrow -\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha}$

   d. Pour $\alpha \in D_F$ justifier que F est dérivable en α, calculer $F'(\alpha)$ et retrouver son sens de variation. Prouver de même que $F''(\alpha)$ existe et trouver son signe.

   e. Construire schématiquement le graphe de F dans un repère orthonormé.

III

On pose $I(r,s) = \int_0^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ où r et s sont des nombres réels.

1. Soit $0 < a < 1$; déterminer les couples (r,s) de réels tels que l'intégrale $\int_a^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ soit convergente.

2. Soit $b \in \mathbb{R}$, $b > 1$, déterminer tous les couples (β,γ) de réels tels que $\int_b^{+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\gamma} dx$ soit convergente.

3. En déduire que si $s > -1$ et $r > -1$, l'intégrale $I(r,s)$ est définie.

4. Démontrer que $I(r,s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-(r+1)x} dx = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s)$.

5. Soit $s > 0$. Trouver une relation simple entre $I(0,s)$ et $I(0,s-1)$; en déduire la valeur de $I(r,n)$ où n est un entier naturel.

IV

1. a. Démontrer que $\alpha \to x^{\alpha x}$, x fixé entre 0 et 1, admet en 0 un développement en série entière de la variable α, de rayon de convergence infini.

   b. On écrit ce développement : $x^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\alpha^k + R_n(x,\alpha)$, où $R_n(x,\alpha)$ est le reste à l'ordre n de la série. Majorer $|R_n(x,\alpha)|$ en fonction de α et n uniquement.

2. En déduire que F admet en 0 un développement en série entière. Expliciter ce développement et donner son rayon.